احتمال پیشرفته		
مرجع	Rosenthal, J. S. (2006). *A first look at rigorous probability theory*. World Scientific Publishing Company.	
مدرس	عبداله جلیلیان، گروه آمار دانشگاه رازی	صفحه 15

هفته‌ی پنجم - جلسه‌ی نهم

فرض کنید $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ به‌طوری که $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$. در این صورت $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ حد دنباله‌ی منبسط شونده‌ی $\{A_n\}$ است و می‌نویسیم $\{A_n\} \uparrow A$ یا $A_n \uparrow A$. بدیهی است که در این حالت $A \in \mathcal{F}$.

فرض کنید $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ به‌طوری که $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$. در این صورت $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ حد دنباله‌ی منقبض شونده‌ی $\{A_n\}$ است و می‌نویسیم $\{A_n\} \downarrow A$ یا $A_n \downarrow A$. بدیهی است که در این حالت $A \in \mathcal{F}$.

قضیه (پیوستگی اندازه‌ی احتمال): اگر $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ دنباله‌ای از پیشامدها باشد به طوری که $\{A_n\} \uparrow A$ یا $\{A_n\} \downarrow A$، آن‌گاه $P(A) = \lim\limits_{n\to\infty} P(A_n)$.

برای دنباله‌ی دلخواه $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ از پیشامدها، حد سوپریمم و حد اینفیموم دنباله‌ی $\{A_n\}$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\limsup_n A_n = \{A_n; \text{i.o.}\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n, \quad \liminf_n A_n = \{A_n; \text{a.a.}\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n,$$

درواقع $\limsup A_n$ از برآمدهای $\omega \in \Omega$ تشکیل شده است که ω در بی‌نهایت از A_nها است. همچنین $\liminf A_n$ از برآمدهای $\omega \in \Omega$ تشکیل شده است که ω جز در تعداد متنهای، در همه‌ی A_nها قرار دارد. بدیهی است که $\limsup A_n \in \mathcal{F}$ و $\liminf A_n \in \mathcal{F}$. همچنین از قوانین دمورگان نتیجه می‌شود که $(\liminf A_n)^c = \limsup A_n^c$ و $(\limsup A_n)^c = \liminf A_n^c$. به علاوه همواره $\liminf A_n \subset \limsup A_n$.

تعریف: دنباله‌ی $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ از پیشامدها به A همگراست هرگاه $\liminf A_n = A = \limsup A_n$. در این حالت می‌نویسیم $\lim A_n = A$ یا $A_n \to A$.

می‌توان نشان داد که اگر $A_n \to A$، آن‌گاه $\lim P(A_n) = P(A)$.

قضیه (لم فاتو): همواره داریم $P(\liminf A_n) \le \liminf P(A_n) \le \limsup P(A_n) \le P(\limsup A_n)$.

احتمال پیشرفته		
مرجع	Rosenthal, J. S. (2006). *A first look at rigorous probability theory*. World Scientific Publishing Company.	
مدرس	عبداله جلیلیان، گروه آمار دانشگاه رازی	صفحه 16

قضیه (لم بورل-کانتلی): فرض کنید $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ دنباله‌ای از پیشامدها باشند.

الف) اگر $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$، آن‌گاه $P(\limsup A_n) = 0$.

ب) اگر $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ و $\{A_n\}$ مستقل باشند، آن‌گاه $P(\limsup A_n) = 1$.

مثال: در آزمایش تصادفی بی‌نهایت بار پرتاب مستقل یک سکه‌ی سالم، فرض کنید H_n بیانگر پیشامد شیر آمدن در n-امین پرتاب باشد. پیشامدهای زیر را در نظر بگیرید:

$$A_n = \bigcap_{i=1}^{[\log_2 n]} H_{n+i} = H_{2^n+1} \cap H_{2^n+2} \cap \cdots \cap H_{2^n+[\log_2 n]}$$

$$C_n = \bigcap_{i=1}^{[2\log_2 n]} H_{n+i} = H_{2^n+1} \cap H_{2^n+2} \cap \cdots \cap H_{2^n+[2\log_2 n]}$$

در این صورت $\{A_n\}$ دنباله‌ای از پیشامدهای مستقل و $\{C_n\}$ دنباله‌ای از پیشامدهای وابسته هستند. به علاوه

$$P(A_n) = \prod_{i=1}^{[\log_2 n]} P(H_{2^n+i}) = \frac{1}{2^{[\log_2 n]}} \approx \frac{1}{n}$$

$$P(C_n) = \prod_{i=1}^{[2\log_2 n]} P(H_{2^n+i}) = \frac{1}{2^{[2\log_2 n]}} \approx \frac{1}{n^2}$$

بنابراین $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ اما $\sum_{n=1}^{\infty} P(C_n) < \infty$. از لم بورل-کانتلی نتیجه می‌شود که $P(\limsup A_n) = 1$ و $P(\limsup C_n) = 0$. با تعریف $B_n = H_n \cap H_{n+1}$، دنباله‌ی $\{B_n\}$ از پیشامدهای وابسته تشکیل شده است که $\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/4 = \infty$. پس نمی‌توان به طور مستقیم از لم بورل-کانتلی برای تعیین مقدار $P(\limsup B_n)$ استفاده کرد. با این حال زیردنباله‌ی $\{B_{2k}\}$ که تنها از جملات با اندیس زوج دنباله‌ی اصلی تشکیل شده است دنباله‌ای از پیشامدهای مستقل را تشکیل می‌دهد که $\sum_{k=1}^{\infty} P(B_{2k}) = \sum_{k=1}^{\infty} 1/4 = \infty$ و بنابر قسمت ب لم بورل-کانتلی داریم $P(\limsup B_{2k}) = 1$. با این حال چون $\limsup B_{2k} \subset \limsup B_n$، نتیجه می‌شود که $P(\limsup B_n) = 1$.