احتمال پیشرفته		
مرجع	Rosenthal, J. S. (2006). *A first look at rigorous probability theory*. World Scientific Publishing Company.	
مدرس	عبداله جلیلیان، گروه آمار دانشگاه رازی	صفحه 13

هفته‌ی چهارم - جلسه‌ی هشتم

به صورت شهودی، دو پشامد $A, B \in \mathcal{F}$ را مستقل گوییم هرگاه رخ دادن هر کدام بر احتمال رخداد دیگری تأثیری نداشته باشد. تعریف دقیق مفهوم استقلال دو پیشامد به صورت زیر است.

تعریف: پشامدهای $A, B \in \mathcal{F}$ را مستقل گویند هرگاه $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

تعریف استقلال را می‌توان به هر گردایه‌ی دلخواهی از پیشامدها تعیم داد.

تعریف: برای هر $\alpha \in I$ ، فرض کنید $A_\alpha \in \mathcal{F}$ که در آن I یک مجموعه‌ی اندیس‌گذار دلخواه است. گردایه‌ی پیشامدهای $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ را مستقل گویند هرگاه برای هر $n \in \mathbb{N}$ و هر $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in I$،

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_{\alpha_i}) = \prod_{i=1}^{n} P(A_{\alpha_i}).$$

برای بررسی استقلال پیشامدهای $A_1, \ldots, A_m$، تعداد $2^m - m - 1$ شرط (احتمال اشتراک) باید بررسی شوند. گردایه‌ی $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ از پیشامدها مستقل هستند اگر و تنها اگر $\{E_\alpha : \alpha \in I\}$ که در آن $E_\alpha = A_\alpha$ یا $E_\alpha = A_\alpha^c$ است، مستقل باشند. بنابراین استقلال تحت متمم‌گیری حفظ می‌شود.

تعریف: برای هر $\alpha \in I$ ، فرض کنید X_α یک متغیر تصادفی دلخواه است. گردایه‌ی متغیرهای تصادفی $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ را مستقل گویند هرگاه برای هر $n \in \mathbb{N}$، هر $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in I$ و هر $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$،

$$P\{X_{\alpha_1} \in B_1, \ldots, X_{\alpha_n} \in B_n\} = \prod_{i=1}^{n} P\{X_{\alpha_i} \in B_i\}.$$

به عنوان حالت خاص، دو متغیر تصادفی X و Y مستقل‌اند اگر برای هر $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$،

$$P\{X \in B_1, Y \in B_2\} = P\{X \in B_1\}P\{Y \in B_2\}.$$

می‌توان نشان داد این شرط معادل با آن است که برای هر $x, y \in \mathbb{R}$،

$$P\{X \le x, Y \le y\} = P\{X \le x\}P\{Y \le y\}.$$

احتمال پیشرفته		
مرجع	Rosenthal, J. S. (2006). *A first look at rigorous probability theory*. World Scientific Publishing Company.	
مدرس	عبداله جلیلیان، گروه آمار دانشگاه رازی	صفحه 14

قضیه: اگر X و Y متغیرهای تصادفی مستقل و $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابع‌های اندازه‌پذیری باشند، آن‌گاه $f(X)$ و $g(Y)$ نیز متغیرهای تصادفی مستقلی هستند.