احتمال پیشرفته	
مرجع	Rosenthal, J. S. (2006). *A first look at rigorous probability theory*. World Scientific Publishing Company.
مدرس	عبداله جلیلیان، گروه آمار دانشگاه رازی — صفحه 11

هفته‌ی چهارم - جلسه‌ی هفتم

فرض کنید $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ سه‌تایی احتمال (فضای احتمال) یک آزمایش تصادفی مفروض باشد. اغلب تابع‌هایی از برآمدهای $\omega \in \Omega$ آزمایش تصادفی مورد توجه هستند.

تعریف: تابع $X : \Omega \to \mathbb{R}$ را یک متغیر تصادفی گویند هرگاه برای هر $x \in \mathbb{R}$،

$$\{X \leq x\} = X^{-1}((-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}.$$

قضیه: تابع $X : \Omega \to \mathbb{R}$ یک متغیر تصادفی است اگر و تنها اگر

الف) برای هر $x \in \mathbb{R}$، $\{X < x\} \in \mathcal{F}$.

ب) برای هر $x \in \mathbb{R}$، $\{X > x\} \in \mathcal{F}$.

ج) برای هر $x \in \mathbb{R}$، $\{X \geq x\} \in \mathcal{F}$.

د) برای هر زیرمجموعه‌ی بورل $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$، $\{X \in B\} \in \mathcal{F}$.

مثال: برای آزمایش تصادفی انتخاب یک نقطه به تصادف از بازه‌ی $[0, 1]$، سه‌تایی احتمال به صورت $\Omega = [0, 1]$، $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0, 1])$ و $P = \lambda$ (اندازه‌ی لبگ) است. تابع‌های $X(\omega) = \omega$، $Y(\omega) = 2\omega$ و $Z(\omega) = 3\omega + 4$ متغیرهای تصادفی روی این فضای احتمال هستند.

برای هر $A \subset \Omega$، تابع نشانگر A به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathbf{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \omega \notin A \end{cases}$$

قضیه: الف) اگر $A \in \mathcal{F}$، آن‌گاه $X = \mathbf{1}_A$ یک متغیر تصادفی است.

ب) اگر X و Y متغیرتصادفی باشند و $c \in \mathbb{R}$ مقدار ثابتی باشد، آن‌گاه $X + c$، cX، $X + Y$ و XY نیز متغیرهای تصادفی هستند.

ج) فرض کنید $Z_1, Z_2, \ldots$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی باشد که برای هر $\omega \in \Omega$، $Z(\omega) = \lim\limits_{n\to\infty} Z_n(\omega)$ موجود و متناهی باشد. آن‌گاه یک متغیر تصادفی است.

تعریف: تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را بورل اندازه‌پذیر گویند هرگاه به ازای هر زیرمجموعه‌ی بورل $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$،

$$f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in B\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

قضیه: اگر $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته یا پیوسته‌ی قطعه‌ای (تعداد نقاط ناپیوستگی متناهی یا شمارا) باشد، آن‌گاه f یک تابع بورل اندازه‌پذیر است.

قضیه: اگر X یک متغیر تصادفی و $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی بورل اندازه‌پذیر باشد، آن‌گاه $Y(\omega) = f(X(\omega))$ یک متغیر تصادفی است.

مثال: اگر X یک متغیر تصادفی دلخواه باشد، آن‌گاه

$$\sin(X), \quad \sqrt{|X|}, \quad \exp(-X^2), \quad \log(1+X^2), \quad X/(1+X^2)$$

نیز متغیر تصادفی هستند.

مثال: فرض کنید $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ سه‌تایی احتمال مربوط به آزمایش تصادفی انتخاب یک نقطه به تصادف از بازه‌ی $[0,1]$ باشد و $H \subset \Omega$ که $H \notin \mathcal{F}$. در این‌صورت $X = \mathbf{1}_H$ تابعی از Ω به $\mathbb{R}$ است اما یک متغیر تصادفی نیست.