

احتمال پیشرفته

Rosenthal, J. S. (2006). <i>A first look at rigorous probability theory</i> . World Scientific Publishing Company.	مرجع
صفحه 8	عبداله جلیلیان، گروه آمار دانشگاه رازی

هفته‌ی سوم - جلسه‌ی پنجم

قضیه: شرط‌های تابع مجموعه‌ای P در قضیه‌ی توسیع را می‌توان با شرط زیر جایگزین کرد.

• برای هر $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{J}$ که $A_i \cap A_j = \emptyset$ ، $i \neq j$ ، و $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{J}$ داشته باشیم

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

مثال: در آزمایش تصادفی انتخاب یک نقطه به تصادف از بازه‌ی $[0, 1]$ ، فضای نمونه‌ای $\Omega = [0, 1]$ است. اگر \mathcal{J} مجموعه‌ی همه‌ی بازه‌های درون Ω باشد، آن‌گاه همان‌طور که دیدیم \mathcal{J} یک شبه‌جبر از زیرمجموعه‌های Ω است. تابع مجموعه‌ای

$$P((a, b)) = P([a, b)) = P((a, b]) = P([a, b]) = b - a$$

در شرط قضیه‌ی بالا صدق و در نتیجه بنابر قضیه‌ی توسیع قابل گسترش به P^* (اندازه‌ی لبگ) روی \mathcal{M} (سیگما جبر لبگ) است. در این مثال می‌توان نشان داد که $H \subset \Omega$ وجود دارد به طوری که $H \notin \mathcal{M}$ ؛ یعنی $\mathcal{M} \neq 2^\Omega$.

مثال: در آزمایش تصادفی بی‌نهایت بار برتاب مستقل یک سکه‌ی سالم، فضای نمونه‌ای آزمایش را می‌توان به

صورت $\Omega = \{(r_1, r_2, r_3, \dots) : r_i \in \{0, 1\}\}$ در نظر گرفت. همچنین

$$\mathcal{J} = \{A_{a_1 a_2 \dots a_n} : n \in \mathbb{N}, a_1, \dots, a_n \in \{0, 1\}\} \cup \{\emptyset, \Omega\}$$

که در آن

$$A_{a_1 a_2 \dots a_n} = \{(r_1, r_2, r_3, \dots) \in \Omega : r_1 = a_1, \dots, r_n = a_n\}$$

استوانه‌ای با قاعده‌ی $\{0, 1\}$ ، $a_1, \dots, a_n \in \{0, 1\}$ است، یک شبه‌جبر از زیرمجموعه‌های Ω را در اختیار می‌گذارد. تابع مجموعه‌ای $P(A_{a_1 a_2 \dots a_n}) = 1/2^n$ در شرط قضیه‌ی بالا (شمارا جمعی بودن) صدق و در نتیجه بنابر قضیه‌ی توسیع قابل گسترش به P^* روی \mathcal{M} است.

مثال: در آزمایش تصادفی انتخاب یک نقطه به تصادف از مربع یکه، فضای نمونه‌ای به صورت $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ است و

$$\mathcal{J} = \{[a, b] \times [c, d] : 0 \leq a \leq b \leq 1, 0 \leq c \leq d \leq 1\} \cup \emptyset$$

احتمال پیشرفته

Rosenthal, J. S. (2006). <i>A first look at rigorous probability theory</i> . World Scientific Publishing Company.		مرجع
صفحه 9	عبداله جلیلیان، گروه آمار دانشگاه رازی	مدرس

یک شبه جبر از زیرمجموعه های Ω را در اختیار می گذارد. تابع مجموعه ای $P([a, b] \times [c, d]) = (b - a)(d - c)$ در شرط قضیه ی بالا صدق و در نتیجه بنا بر قضیه ی توسیع قابل گسترش به P^* روی \mathcal{M} است.