

احتمال پیشرفته	
مرجع	Rosenthal, J. S. (2006). <i>A first look at rigorous probability theory</i> . World Scientific Publishing Company.
مدرس	عبداله جلیلیان، گروه آمار دانشگاه رازی
صفحه 6	

## هفته‌ی دوم - جلسه‌ی چهارم

مجموعه‌ی  $\mathcal{J}$  از زیرمجموعه‌های  $\Omega$  را یک شبه‌جبر (نیم‌جبر) گویند هرگاه

- $\emptyset, \Omega \in \mathcal{J}$
- نسبت به اشتراک متناهی بسته است؛ یعنی اگر  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{J}$ ، آنگاه  $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{J}$
- اگر  $A \in \mathcal{J}$ ، آنگاه  $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{J}$  وجود دارند به طوری که  $A_i \cap A_j = \emptyset$ ،  $i \neq j$  و  $A^c = \bigcup_{i=1}^m A_i$

**مثال ۱:** اگر  $\Omega = [0, 1]$  و  $\mathcal{J}$  مجموعه‌ی همه‌ی بازه‌های درون  $\Omega$  باشد، آنگاه  $\mathcal{J}$  یک شبه‌جبر از زیرمجموعه‌های  $\Omega$  است.

**مثال ۲:** فرض کنید  $\Omega = \{(r_1, r_2, r_3, \dots) : r_i \in \{0, 1\}\}$  و

$$\mathcal{J} = \{A_{a_1 a_2 \dots a_n} : n \in \mathbb{N}, a_1, \dots, a_n \in \{0, 1\}\} \cup \{\emptyset, \Omega\}$$

که در آن

$$A_{a_1 a_2 \dots a_n} = \{(r_1, r_2, r_3, \dots) \in \Omega : r_1 = a_1, \dots, r_n = a_n\}$$

استوانه‌ای با قاعده‌ی  $\{0, 1\}$  را  $a_1, \dots, a_n \in \{0, 1\}$  تعریف می‌کند. در این صورت  $\mathcal{J}$  یک شبه‌جبر از زیرمجموعه‌های  $\Omega$  است.

**مثال ۳:** اگر  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$  و

$$\mathcal{J} = \{[a, b] \times [c, d] : 0 \leq a \leq b \leq 1, 0 \leq c \leq d \leq 1\} \cup \emptyset$$

آنگاه  $\mathcal{J}$  یک شبه‌جبر از زیرمجموعه‌های  $\Omega$  است.

قضیه (قضیه توسیع): فرض کنید  $\mathcal{J}$  یک شبه‌جبر از زیرمجموعه‌های  $\Omega$  و  $P : \mathcal{J} \rightarrow [0, 1]$  تابع مجموعه‌ای باشد

که  $P(\emptyset) = 0$  و  $P(\Omega) = 1$  و به علاوه در دوشروط زیر صدق کند

- برای هر  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{J}$  که  $A_i \cap A_j = \emptyset$ ،  $i \neq j$  و  $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{J}$  داشته باشیم

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \geq \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

- برای هر  $A, A_1, A_2, \dots \in \mathcal{J}$  که  $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$  داشته باشیم

$$P(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

### احتمال پیشرفته

Rosenthal, J. S. (2006). <i>A first look at rigorous probability theory</i> . World Scientific Publishing Company.		مرجع
صفحه 7	عبداله جلیلیان، گروه آمار دانشگاه رازی	مدرس

در این صورت سیگما جبر  $\mathcal{M}$  از زیرمجموعه‌های  $\Omega$  و اندازه‌ی احتمال  $P^*$  روی  $\mathcal{M}$  موجود هستند به طوری که

$$P^*(A) = P(A), A \in \mathcal{J} \text{ و به ازای هر } \mathcal{J} \subset \mathcal{M}$$

ایده‌ی قضیه: ساختن سه تایی احتمال  $(\Omega, \mathcal{M}, P^*)$  بر اساس شبه جبر  $\mathcal{J}$  و تابع مجموعه‌ای  $P$