احتمال پیشرفته		
مرجع	Rosenthal, J. S. (2006). *A first look at rigorous probability theory*. World Scientific Publishing Company.	
مدرس	عبداله جلیلیان، گروه آمار دانشگاه رازی	صفحه 4

هفته‌ی دوم - جلسه‌ی سوم

اما آیا می‌توان برای هر فضای نمونه Ω همواره می‌توان تابع (اندازه‌ی) احتمال مطلوبی یافت که ویژگی شمارا جمعی بودن $(**)$ را دارای باشد؟

قضیه: برای $\Omega = [0, 1]$، تابع $A \mapsto P(A)$ وجود ندارد که در ویژگی‌های زیر صدق کند.

1. نامنفی باشد.
2. $P(\Omega) = 1$.
3. شمارا جمعی باشد.
4. نسبت به انتقال ناوردا باشد، یعنی برای هر $A \subset \Omega$ و $x \in \mathbb{R}$، $P(A \oplus x) = P(A)$.

بنابراین برای برقراری ویژگی شمارا جمعی بودن $(**)$ در برخی از حالت‌ها چاره‌ای جز محدود کردن دامنه‌ی تعریف تابع (اندازه‌ی) احتمال نیست. به عبارت دیگر، برای برقرای شمارا جمعی بودن در برخی از حالت‌ها احتمال برای هر گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های فضای نمونه‌ای تعریف می‌شود و برای برخی از زیرمجموعه‌های Ω احتمال قابل تعریف نیست.

سه‌تایی احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ متشکل از مولفه‌های زیر است:

- فضای نمونه Ω: همه‌ی برآمدهای آزمایش تصادفی
- سیگماجبر $\mathcal{F}$: همه‌ی پیشامدهایی از آزمایش تصادفی که احتمال آن‌ها قابل محاسبه است
- اندازه‌ی احتمال P: تابع مجموعه‌ای نامنفی که با دریافت هر پیشامد در $\mathcal{F}$، احتمال آن را برمی‌گرداند

مجموعه‌ی $\mathcal{F}$ را یک سیگماجبر از زیرمجموعه‌های Ω گویند هرگاه

- $\Omega \in \mathcal{F}$
- نسبت به متمم‌گیری بسته باشد؛ یعنی اگر $A \in \mathcal{F}$، آن‌گاه $A^c \in \mathcal{F}$
- نسبت به اجتماع شمارا بسته باشد؛ یعنی اگر $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$، آن‌گاه $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

<table>
<tr><td colspan="3">احتمال پیشرفته</td></tr>
<tr><td>مرجع</td><td colspan="2">Rosenthal, J. S. (2006). A first look at rigorous probability theory. World Scientific Publishing Company.</td></tr>
<tr><td>مدرس</td><td>عبداله جلیلیان، گروه آمار دانشگاه رازی</td><td>صفحه 5</td></tr>
</table>

مجموعه‌ی $\{\emptyset, \Omega\}$ و مجموعه‌ی توانی Ω (مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های Ω) که با نماد 2^Ω نشان داده می‌شود، دو سیگماجبر بدیهی از زیرمجموعه‌های Ω هستند و همواره $\{\emptyset, \Omega\} \subset \mathcal{F} \subset 2^\Omega$.

اندازه‌ی احتمال $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ تابعی مجموعه‌ای است که در سه شرط (اصل‌های موضوع احتمال) صدق می‌کند:

- برای هر $A \in \mathcal{F}$، $P(A) \geq 0$
- $P(\Omega) = 1$
- برای هر $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ که $A_i \cap A_j = \emptyset$، $i \neq j$،

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

قضیه (ویژگی‌های اندازه‌ی احتمال): برای سه‌تایی احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ همواره داریم

- $P(\emptyset) = 0$
- $P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$
- $P(A^c) = 1 - P(A)$
- P تابعی یکنواست؛ یعنی اگر $A \subset B$، آن‌گاه $P(A) \leq P(B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- P تابعی شمارا زیرجمعی است (نابرابری بول)؛ یعنی $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$