احتمال پیشرفته		
مرجع	Rosenthal, J. S. (2006). *A first look at rigorous probability theory*. World Scientific Publishing Company.	
مدرس	عبداله جلیلیان، گروه آمار دانشگاه رازی	صفحه 2

هفته‌ی اول - جلسه‌ی دوم

چرا احتمال پیشرفته؟ مگر مفاهیم احتمال، متغیر تصادفی، توزیع احتمال، استقلال، امیدریاضی و ... در درس‌های دوره‌ی کارشناسی آمار (مبانی احتمال، احتمال ۱ و ۲) مطرح نشده‌اند؟

درس‌های مقدماتی در دوره‌ی کارشناسی پاسخ‌گوی همه‌ی ابعاد ریاضی احتمال نیست.

مثال ۱: فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی مستقلی به ترتیب با توزیع‌های پواسون با میانگین $\lambda = 5$ و نرمال استاندارد باشند. در این صورت

$$\mathbb{P}\{X = k\} = e^{-5}\frac{5^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$
$$\mathbb{P}\{Y = y\} = 0, \quad y \in \mathbb{R}$$

و برای $-\infty < a < b < \infty$ دلخواه داریم

$$\mathbb{P}\{a < X \le b\} = \sum_{x=[a]+1}^{[b]} e^{-5}\frac{5^x}{x!},$$
$$\mathbb{P}\{a < Y \le b\} = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \mathrm{d}y.$$

متغیر تصادفی جدید Z را به صورت

$$Z = \begin{cases} X & W = 1 \\ Y & W = 0 \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم که در آن W یک متغیر تصادفی برنولی با احتمال پیروزی $p = 0.5$ و مستقل از X و Y است.

آیا Z مانند X گسسته و دارای تابع جرم احتمال است؟

آیا Z مانند Y (مطلقاً) پیوسته و دارای تابع چگالی احتمال است؟

چگونه می‌توان امید ریاضی تابعی از Z مانند Z^2 یا $\sin(2\pi Z)$ را محاسبه کرد؟

مثال ۲: فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع یکنواخت روی بازه‌ی $[0, 1]$ است. در این صورت برای هر $0 \le a \le b \le 1$ داریم

$$\mathbb{P}\{a < X \le b\} = \mathbb{P}\{X \in (a, b]\} = b - a$$

یعنی احتمال قرار گرفتن X در هر بازه با طول آن برابر است.

احتمال پیشرفته		
مرجع	Rosenthal, J. S. (2006). *A first look at rigorous probability theory*. World Scientific Publishing Company.	
مدرس	عبداله جلیلیان، گروه آمار دانشگاه رازی	صفحه 3

آیا می‌توان نتیجه گرفت احتمال قرار گرفتن X در هر $A \subset [0,1]$ برابر است با طول A؟

اینکه برای هر $x \in [0,1]$ داریم $\mathbb{P}\{X = x\} = 0$ مشکلی در تعریف ریاضی احتمال ایجاد نمی‌کند؟

آیا تابع (اندازه) موجود است که با دریافت هر $A \subset [0,1]$ مقدار طول آن را برگرداند؟

چقدر احتمال دارد X عدد گویایی باشد؟

آزمایش (پدیده‌ی) تصادفی: نتیجه‌ی آن از قبل به طور قطعی قابل تعیین نباشد.

فضای نمونه Ω: مجموعه‌ی همه‌ی برآمدها (نتیجه‌های) آزمایش تصادفی.

تابع (اندازه‌ی) احتمال: با دریافت هر $A \subset \Omega$، مقدار تابع به ازای A، یعنی $P(A)$، بیانگر احتمال A رخداد است.

انتظارات شهودی ما از یک تابع احتمال

- $P(A)$ مقداری بین صفر و یک است.
- احتمال فضای نمونه برابر با کل احتمال است (برآمد نهایی آزمایش حتماً در فضای نمونه است)، یعنی $P(\Omega) = 1$.
- احتمال اجتماع $A, B \subset \Omega$ که $A \cap B = \emptyset$ برابر است با جمع احتمال هر یک از آن‌ها

$$(*) \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

ویژگی $(*)$ که جمعی بودن تابع (اندازه‌ی) احتمال نامیده می‌شود با استقرای ریاضی قابل تعمیم به هر تعداد متناهی دلخواهی است، یعنی اگر $A_1, \ldots, A_n \subset \Omega$ که $A_i \cap A_j = \emptyset$، $i \neq j$، آن‌گاه

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

اما ویژگی $(*)$ در حالت کلی قابل تعمیم به شماراجمعی بودن نیست. ویژگی شمارا جمعی بودن بیانگر آن است که اگر $A_1, A_2, \ldots \subset \Omega$ که $A_i \cap A_j = \emptyset$، $i \neq j$، آن‌گاه

$$(**) \quad P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

با این حال ویژگی شمارا جمعی بودن $(**)$ باعث می‌شود تابع (اندازه‌ی) احتمال P دارای ویژگی ریاضی مطلوب پیوستگی شود. به همین دلیل ویژگی شهودی $(*)$ با ویژگی ریاضی $(**)$ جایگزین می‌شود.