احتمال پیشرفته		
مرجع	Rosenthal, J. S. (2006). *A first look at rigorous probability theory*. World Scientific Publishing Company.	
مدرس	عبداله جلیلیان، گروه آمار دانشگاه رازی	صفحه 17

هفته‌ی پنجم - جلسه‌ی دهم

برای دنباله‌ی دلخواه پیشامدهای $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$، $\sigma(A_n, A_{n+1}, A_{n+2}, \ldots)$ کوچکترین سیگماجبری است که $A_n, A_{n+1}, A_{n+2}, \ldots$ را در بر دارد. به عبارت دیگر $\sigma(A_n, A_{n+1}, A_{n+2}, \ldots)$ اشتراک همه‌ی سیگماجبرهایی است که $A_n, A_{n+1}, A_{n+2}, \ldots$ را در بر دارند؛ یعنی

$$\sigma(A_n, A_{n+1}, A_{n+2}, \ldots) = \bigcap \{\mathcal{G} : \mathcal{G} \text{ is a } \sigma\text{-algerbra and } A_n, A_{n+1}, A_{n+2}, \ldots \in \mathcal{G}\}$$

باید توجه داشت که اشتراک دلخواه از سیگماجبرها، همواره یک سیگماجبر است اما اجتماع دو سیگماجبر لزوماً یک سیگماجبر نیست. همچنین

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad \sigma(A_n, A_{n+1}, A_{n+2}, \ldots) \supset \sigma(A_{n+1}, A_{n+2}, A_{n+3}, \ldots)$$

تعریف: سیگماجبر $\mathcal{T} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma(A_n, A_{n+1}, A_{n+2}, \ldots)$ سیگماجبر دُمی دنباله‌ی $\{A_n\}$ است.

می‌توان نشان داد که همواره $\limsup A_n \in \mathcal{T}$ و $\liminf A_n \in \mathcal{T}$.

قضیه (قانون صفر و یک کولموگروف): اگر $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ پیشامدهای مستقلی باشند، آن‌گاه برای هر پشامد $A \in \mathcal{T}$ در سیگماجبر دمی، $P(A) = 0$ یا $P(A) = 1$.

مثال: در آزمایش تصادفی بی‌نهایت بار پرتاب مستقل یک سکه‌ی سالم، فرض کنید متغیر تصادفی X_n بیانگر تعداد شیرها n پرتاب اول سکه و $H_n = \{X_n - X_{n-1} = 1\}$ بیانگر پیشامد شیر آمدن در n-امین پرتاب سکه باشد. در این صورت می‌توان نشادن داد که $\limsup H_{2^n}$ و

$$E = \left\{\omega \in \Omega : \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{k} \frac{X_n(\omega)}{n} \leq \frac{1}{4}\right\},$$
$$F = \limsup \left\{\omega \in \Omega : \frac{X_n(\omega)}{n} = \frac{X_{n+1}(\omega)}{n+1} = \frac{X_{n+2}(\omega)}{n+2}\right\}$$

در سیگماجبر دمی دنباله‌ی $\{H_n\}$ قرار دارند. با توجه به استقلال پشامدهای $\{H_n\}$، همه‌ی اعضای س سیگماجبر دمی دنباله‌ی $\{H_n\}$ دارای احتمال صفر یا یک هستند.